Universidad de Buenos Aires		Facultad de Ingeniería		
1º Cuatrimestre 2018	Curso 5 / Curso 2 (Schwarz – Sosa)	Parcial. Primera Oportunidad.	Tema 1	Nota
Padrón	Apellido y Nombres			

Ejercicio 1. Con los siguientes datos se han realizado Interpolaciones por Newton, Lagrange Baricéntrico y Spline; siempre eligiendo los puntos desde X0 en adelante, en orden de índice ***i*** creciente.

i	0	1	2	3	4
Xi	?	?	?	?	**5**
Yi	?	?	?	?	**10**

W0 (X0, X1, X2) = -0,5

$$A = \begin{vmatrix} nd & nd & 0 & 0 & 0 \\ nd & nd & nd & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & nd & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & nd & nd & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & nd & nd \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} nd \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ nd \end{vmatrix}$$

PN (X) = 2 + 2 .(X-X1) + nd.(X-X0)(X-X1) + nd.(X-X0)(X-X1)(X-X3) + nd.(X.X0)(X-X1)(X-X2)(X-X3)

a) Sin realizar cálculo alguno, determinar el ordenamiento de los puntos Xi de la tabla.
b) Utilizando la información de la matriz de Spline y Lagrange Baricéntrico, hallar los puntos X0, X1, X2 y X3.
c) A partir de la información de las Diferencias Divididas usadas en el Polinomio de Newton, hallar Y0 e Y1.
d) Incorporando los datos del vector B de Spline, hallar Y2 e Y3.
e) Indicar para cada interpolación los puntos usados, el grado y la cantidad de polinomios resultantes.

Ejercicio 2. Se tiene el sistema A.X = B, la Factorización por Doolittle de A y algunos datos usados para el MGC:

$$A := \begin{bmatrix} A11 & A12 & A13 \\ A21 & (-x)\cdot \sin(x) & 0 \\ A31 & 0 & x \end{bmatrix} \quad L := \begin{bmatrix} nd & 0 & 0 \\ 0,25 & nd & 0 \\ 0,5 & nd & nd \end{bmatrix} \quad U := \begin{bmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 0 & nd & nd \\ 0 & 0 & nd \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad X0 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \alpha := \frac{r0^T \cdot r0}{d0^T \cdot A \cdot d0}$$

a) A partir de la información de L y U, obtener la matriz A
b) Considerando el vector inicial X0 para el MGC, plantear una ENOL para el caso $\alpha(x) = 1/8$
c) Resolver la ENOL en [2.5 , 4.5] por un Método de convergencia cuadrática con una tolerancia de 10^{-5}
d) Para el valor de x hallado, reescriba la matriz A e indique si el MGC y el método de Jacobi convergerían para dicha matriz.
e) Estime el valor de Te por perturbaciones experimentales para [$f(x) = \alpha(x) - 1/8$] en x=4.5
NOTA: Si no pudo hallar $\alpha(x)$ adopte $\alpha(x) = 2 / [x + 2.x.sen(x) + 14]$

Ejercicio 3. Indicar a qué método corresponde el siguiente bloque de Python y detectar cuáles son los 3 errores que impedirían que el mismo llegue a un resultado correcto:

```
Numerador = 1
Denominador = 0
for i in range (0,n):
    Temp = self.W[i]*(x-self.datos.X[i])
    Numerador += self.datos.Y[i]/Temp
    Denominador += Temp
return Numerador/Denominador
```

____

Firma

Universidad de Buenos Aires		Facultad de Ingeniería		
1º Cuatrimestre 2018	Curso 5 / Curso 2 (Schwarz – Sosa)	Parcial. Primera Oportunidad.	Tema 2	Nota
Padrón	Apellido y Nombres			

Ejercicio 1. Con los siguientes datos se han realizado Interpolaciones por Newton, Lagrange Baricéntrico y Spline; siempre eligiendo los puntos desde X0 en adelante, en orden de índice ***i*** creciente.

i	0	1	2	3	4
Xi	?	?	?	?	**6**
Yi	?	?	?	?	**12**

W0 (X0, X1, X2) = -0,5

$$A = \begin{vmatrix} nd & nd & 0 & 0 & 0 \\ nd & nd & nd & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & nd & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & nd & nd & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & nd & nd \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} nd \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ nd \end{vmatrix}$$

PN (X) = 4 + 2 .(X-X1) + nd.(X-X0)(X-X1) + nd.(X-X0)(X-X1)(X-X3) + nd.(X.X0)(X-X1)(X-X2)(X-X3)

a) Sin realizar cálculo alguno, determinar el ordenamiento de los puntos Xi de la tabla.
b) Utilizando la información de la matriz de Spline y Lagrange Baricéntrico, hallar los puntos X0, X1, X2 y X3.
c) A partir de la información de las Diferencias Divididas usadas en el Polinomio de Newton, hallar Y0 e Y1.
d) Incorporando los datos del vector B de Spline, hallar Y2 e Y3.
e) Indicar para cada interpolación los puntos usados, el grado y la cantidad de polinomios resultantes.

Ejercicio 2. Se tiene el sistema A.X = B, la Factorización por Doolittle de A y algunos datos usados para el MGC:

$$A := \begin{bmatrix} A11 & A12 & A13 \\ A21 & x & 0 \\ A31 & 0 & x\cdot\cos(x) \end{bmatrix} \quad L := \begin{bmatrix} nd & 0 & 0 \\ 0,5 & nd & 0 \\ 0,25 & nd & nd \end{bmatrix} \quad U := \begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 0 & nd & nd \\ 0 & 0 & nd \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad X0 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \alpha := \frac{r0^T \cdot r0}{d0^T \cdot A \cdot d0}$$

a) A partir de la información de L y U, obtener la matriz A
b) Considerando el vector inicial X0 para el MGC, plantear una ENOL para el caso $\alpha(x) = 1/8$
c) Resolver la ENOL en [3.5 , 5.5] por un Método de convergencia cuadrática con una tolerancia de 10^{-5}
d) Para el valor de x hallado, reescriba la matriz A e indique si el MGC y el método de Jacobi convergerían para dicha matriz.
e) Estime el valor de Te por perturbaciones experimentales para [f(x) = $\alpha(x)$ - 1/8] en x=4.5
NOTA: Si no pudo hallar $\alpha(x)$ adopte $\alpha(x) = 2 / [x – 2.x.\cos(x) + 11]$

Ejercicio 3. Indicar a qué método corresponde el siguiente bloque de Python y detectar cuáles son los 3 errores que impedirían que el mismo llegue a un resultado correcto:

```
Numerador = 0
Denominador = 1
for i in range (0,n):
    Temp = self.W[i]/(x+self.datos.X[i])
    Numerador *= self.datos.Y[i]*Temp
    Denominador += Temp
return Numerador/Denominador
```

____

Firma

Universidad de Buenos Aires		Facultad de Ingeniería		
1º Cuatrimestre 2018	Curso 5 / Curso 2 (Schwarz – Sosa)	Parcial. Primera Oportunidad.	Tema 1	Nota
Padrón 100005	Apellido y Nombres BERNARDO, Kevin			10 (Diez)

ercicio 1. Con los siguientes datos se han realizado Interpolaciones por Newton, Lagrange Baricéntrico y Spline; siempre igiendo los puntos desde X0 en adelante, en orden de índice *i* creciente.

i	0	1	2	3	4
Xi	?	?	?	?	5
Yi	?	?	?	?	10

$$A = \begin{vmatrix} nd & nd & 0 & 0 & 0 \\ nd & nd & nd & 0 & 0 \\ 0 & 1 & nd & 1 & 0 \\ 0 & 0 & nd & nd & 1 \\ 0 & 0 & 0 & nd & nd \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} nd \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ nd \end{vmatrix}$$

W0 (X0, X1, X2) = -0,5

PN (X) = 2 + 2 .(X-X1) + nd.(X-X0)(X-X1) + nd.(X-X0)(X-X1)(X-X3) + nd.(X.X0)(X-X1)(X-X2)(X-X3)

a) Sin realizar cálculo alguno, determinar el ordenamiento de los puntos Xi de la tabla.
b) Utilizando la información de la matriz de Spline y Lagrange Baricéntrico, hallar los puntos X0, X1, X2 y X3.
c) A partir de la información de las Diferencias Divididas usadas en el Polinomio de Newton, hallar Y0 e Y1.
d) Incorporando los datos del vector B de Spline, hallar Y2 e Y3.
e) Indicar para cada interpolación los puntos usados, el grado y la cantidad de polinomios resultantes.

cicio 2. *Se tiene el sistema A.X = B,* la Factorización por Doolittle de A y algunos datos usados para el MGC:

$$A := \begin{bmatrix} A11 & A12 & A13 \\ A21 & (-x)\cdot\sin(x) & 0 \\ A31 & 0 & x \end{bmatrix} \quad L := \begin{bmatrix} nd & 0 & 0 \\ 0,25 & nd & 0 \\ 0,5 & nd & nd \end{bmatrix} \quad U := \begin{bmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 0 & nd & nd \\ 0 & 0 & nd \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad X0 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \alpha := \frac{r0^T \cdot r0}{d0^T \cdot A \cdot d0}$$

a) A partir de la información de L y U, obtener la matriz A
b) Considerando el vector inicial X0 para el MGC, plantear una ENOL para el caso $\alpha(x) = 1/8$
c) Resolver la ENOL en [2.5 , 4.5] por un Método de convergencia cuadrática con una tolerancia de 10^{-5}
d) Para el valor de x hallado, reescriba la matriz A e indique si el MGC y el método de Jacobi convergerían para dicha matriz.
e) Estime el valor de Te por perturbaciones experimentales para [$f(x) = \alpha(x) - 1/8$] en x=4.5

NOTA: Si no pudo hallar $\alpha(x)$ adopte $\alpha(x) = 2 / [x + 2.x.sen(x) + 14]$

Ejercicio 3. Indicar a qué método corresponde el siguiente bloque de Python y detectar cuáles son los 3 errores que impedirían que el mismo llegue a un resultado correcto:

```
Numerador = 1
Denominador = 0
for i in range (0,n):
    Temp = self.W[i]*(x-self.datos.X[i])
    Numerador += self.datos.Y[i]/Temp
    Denominador += Temp
return Numerador/Denominador
```

BERNARDO, Kevin 100005

Ejercicio 1:

a) Se observa el polinomio de Newton dado:

$$P_N(x) = 2 + 2(x-x_1) + nd\,(x-x_1)(x-x_0) + nd\,(x-x_1)(x-x_0)(x-x_3) + nd\,(x-x_1)(x-x_0)(x-x_3)(x-x_2)$$

El método de Newton requiere un orden en los puntos dato (creciente para Newton progresivo y decreciente para regresivo), añadiendo a cada término subsiguiente el factor "$(x-x_{i+1})$", por lo que es sencillo observar que el orden de la tabla es:

$$x_1^e \quad x_0^e \quad x_3^e \quad x_2^e$$

$\boxed{x_i^e : x_i \text{ de la tabla del enunciado}}$

Resta por conocer la posición de x_4. Se observa que el término independiente del polinomio es 2, con lo cual, teniendo en cuenta que para un polinomio de grado 4 es necesario el uso de 5 puntos, y sabiendo que el método es progresivo, se determina que el orden de los puntos es:

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1^e	x_0^e	x_3^e	x_2^e	x_4^e

(de menor a mayor)

↳ $\boxed{\text{renombro los } x_i}$

En otras palabras, el polinomio es de grado 4, por lo que usa en su desarrollo los 5 puntos de la tabla. Es claro observar que x_4 se encuentra en un extremo, ya que, de lo contrario, estaría expreso en el polinomio. Además, al ser progresivo, x_4 no podría ser el valor más chico, ya que el término independiente en dicho caso debería ser $a_0 = y_4 = 10$. Como $a_0 = 2$, se determina que x_4 es el x_i más grande.

b) Con la matriz del método Spline (que usa los puntos de forma ordenada)

$$A = \begin{bmatrix} nd & nd & 0 & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_0+h_2) & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 \\ 0 & 0 & 0 & nd & nd \end{bmatrix}, \text{ donde } h_i = x_{i+1} - x_i$$

$\rightarrow \begin{cases} h_1 = 1 = x_2 - x_1 & (1) \\ h_2 = 1 = x_3 - x_2 & (2) \\ h_3 = 1 = x_4 - x_3 & (3) \end{cases}$

con la nomenclatura ordenada:

Con el dato de $\omega_{e}(x_0^e, x_1^e, x_2^e) = \omega_1(x_0, x_1, x_3) = \dfrac{1}{(x_1 - x_0)} \cdot \dfrac{1}{(x_1 - x_3)} = -0{,}5$

$\rightarrow (x_1 - x_0)(x_1 - x_3) = -2 \quad (4)$

de (1) y (2): $\left.\begin{matrix} x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \end{matrix}\right\} x_1 - x_3 = -2 \quad (5)$

con (3): $x_4 - x_3 = 1 \rightarrow x_3 = x_4 - 1 = 5 - 1 \rightarrow \boxed{x_3 = 4} = x_2^e$

en (5): $x_1 - x_3 = -2 \rightarrow x_1 = -2 + 4 \rightarrow \boxed{x_1 = 2} = x_0^e$

de (5) y (4): $(x_1 - x_0)(x_1 - x_3) = -2$

$(x_1 - x_0) \cdot (-2) = -2 \rightarrow x_1 - x_0 = 1 \quad (6) \rightarrow (h_0 = 1)$

en (6): $x_1 - x_0 = 1 \rightarrow x_0 = x_1 - 1 = 2 - 1 \rightarrow \boxed{x_0 = 1} = x_1^e$

en (1): $x_2 - x_1 = 1 \rightarrow x_2 = x_1 + 1 \rightarrow \boxed{x_2 = 3} = x_3^e$

Luego, la tabla queda:

	0	1	2	3	4
x_i^e	2	1	4	3	5

c) Con la nomenclatura ordenada, los coeficientes del polinomio progresivo de Newton son:

$a_0 = y_0$

$a_1 = f_{01} = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

⋮ etc

Con el polinomio dato, identifico: $a_0 = 2$, $a_1 = 2$

Luego: $\boxed{y_0 = 2}$

$\dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = 2 \rightarrow \dfrac{y_1 - 2}{2 - 1} = 2 \rightarrow \boxed{y_1 = 4}$

Con los subíndices del enunciado: $\boxed{y_0^e = 4}$ $\boxed{y_1^e = 2}$

d) Con la nomenclatura ordenada:

$$B = \begin{bmatrix} nd \\ 3\left[\frac{a_2-a_1}{h_1} - \frac{a_1-a_0}{h_0}\right] \\ 3\left[\frac{a_3-a_2}{h_2} - \frac{a_2-a_1}{h_1}\right] \\ 3\left[\frac{a_4-a_3}{h_3} - \frac{a_3-a_2}{h_2}\right] \\ nd \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} nd \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ nd \end{bmatrix}$$

Sabiendo que $h_0 = h_1 = h_2 = h_3 = 1$

$$\downarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} a_2 - a_1 = a_1 - a_0 & ① \\ a_3 - a_2 = a_2 - a_1 & ② \\ a_4 - a_3 = a_3 - a_2 & ③ \end{cases}$$

donde $a_i = Y_i$

→ en ①: $a_2 = 2a_1 - a_0 = 2Y_1 - Y_0 = 2.4 - 2 \rightarrow \boxed{a_2 = Y_2 = 6} = Y_3^e$

en ②: $a_3 = 2a_2 - a_1 = 2Y_2 - Y_1 = 2.6 - 4 \rightarrow \boxed{a_3 = Y_3 = 8} = X_2^e$

Verifico que el Y_4 dado es correcto:

con ③: $a_3 = \frac{a_4 + a_2}{2} = \frac{Y_4 + Y_2}{2} = \frac{10 + 6}{2} = 8$ ✓

$\boxed{Y_2^e = 8}$

$\boxed{Y_3^e = 6}$

e) Newton:
- 5 puntos usados (uno implícito <x4>)
- grado 4
- 1 polinomio resultante.

Lagrange Baricéntrico:
- 3 puntos usados
- grado 2
- 1 polinomio resultante.

Spline:
- 5 puntos usados
- grado 3 (trazadores cúbicos)
- 4 polinomios resultantes (uno en cada intervalo).

Ejercicio 2:

a)
$$L=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0{,}25 & 1 & 0\\ 0{,}5 & nd & 1\end{bmatrix},\quad U=\begin{bmatrix}8 & 2 & 4\\ 0 & nd & nd\\ 0 & 0 & nd\end{bmatrix}\quad \Bigg\}\text{(por definición)}$$

$A = LU \longrightarrow$
$\underbrace{\{a_{ij}\}}_{\text{i,j adecuado}}$

$a_{11} = 1.8+0.0+0.0 \rightarrow a_{11}=8$
$a_{12} = 1.2+0.nd+0.0 \rightarrow a_{12}=2$
$a_{13} = 1.4+0.nd+0.nd \rightarrow a_{13}=4$
$a_{21} = 0{,}25.8+1.0+0.0 \rightarrow a_{21}=2$
$a_{31} = 0{,}5.8+nd.0+1.0 \rightarrow a_{31}=4$

$$\rightarrow A=\begin{bmatrix}8 & 2 & 4\\ 2 & (-x)\operatorname{sen}(x) & 0\\ 4 & 0 & x\end{bmatrix}$$

b)
$$r^{<0>}=d^{<0>}=B-AX^{<0>}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}8 & 2 & 4\\ 2 & (-x)\operatorname{sen}(x) & 0\\ 4 & 0 & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \alpha_{(x)}=\frac{(r^{<0>})^T r^{<0>}}{(d^{<0>})^T A d^{<0>}}=\frac{(1\ 1\ 1)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}{(1\ 1\ 1)\begin{pmatrix}8 & 2 & 4\\ 2 & (-x)\operatorname{sen}(x) & 0\\ 4 & 0 & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}=\frac{3}{(1\ 1\ 1)\begin{pmatrix}14\\ 2-x\operatorname{sen}(x)\\ 4+x\end{pmatrix}}$$

$$\rightarrow \alpha_{(x)}=\frac{3}{20+x-x\operatorname{sen}(x)}=\frac{1}{8}$$

Planteo: $g_{(x)}=\dfrac{20+x-x\operatorname{sen}(x)}{3}=8$

y luego: $f_{(x)}=\dfrac{(x-x\operatorname{sen}(x)-4)}{3}=0 \rightarrow$ Busco $x / f_{(x)}=0$

c) Uso el método de Newton-Raphson (convergencia cuadrática) en el intervalo $[2{,}5;4{,}5]$

$$X_{n+1}=X_n-\frac{f_{(x_n)}}{f'_{(x_n)}},\quad \text{criterio de corte: } \varepsilon=\frac{|X_k-X_{k-1}|}{|X_k|}\leq \boxed{\text{Tolerancia}=10^{-5}}$$

$$f_{(x)}=\frac{x-x\operatorname{sen}(x)-4}{3},\quad f'_{(x)}=\frac{1-\operatorname{sen}(x)-x\cos(x)}{3}$$

$$\rightarrow X_{i+1}=X_i-\frac{X_i-X_i\operatorname{sen}(X_i)-4}{1-\operatorname{sen}(X_i)-X_i\cos(X_i)}$$

Elijo $X_0=3{,}5$

X_i	X_{i+1}	ε	$\varepsilon\overset{?}{\leq}T$
3,5	3,342765495	$7{,}166.10^{-4}$	NO
	3,340371752	$6{,}5755.10^{-4}$	NO
	3,340370923	$2{,}4817603.10^{-7}$	SI

$\rightarrow$ La solución es $\boxed{X_3=3{,}340370923}$

d) Reescribo la matriz para $x = 3{,}340370923$

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 2 & 0{,}6596290772 & 0 \\ 4 & 0 & 3{,}340370923 \end{bmatrix}$$

-) MGC: — $A \stackrel{?}{=} A^T \rightarrow$ Sí

└ A def. positiva? Analizo subdeterminantes:

$\Delta_1 = 8 \rightarrow \det(\Delta_1) = 8 > 0$ ✓

$\Delta_2 = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 0{,}6596290772 \end{pmatrix} \rightarrow \det(\Delta_2) = 1{,}27\ldots > 0$ ✓

$\Delta_3 = A \longrightarrow \det(A) = -6{,}288302611 < 0$ X

Como uno de los subdeterminantes es nulo $\rightarrow$ A no es def. positiva

$\rightarrow$ $\boxed{\text{MGC NO CONVERGE}}$

-) Jacobi: — $|a_{ii}| \stackrel{?}{>} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$ Fila 1: $8 > 2+4$ ✓

Fila 2: $0{,}6596290772 < 2+0$ X

$\rightarrow$ $\boxed{\text{Jacobi NO CONVERGE}}$

e) $Te \approx \left| \dfrac{y_T - y_S}{y_T} \right| \dfrac{1}{\mu_T - \mu_S}$, donde $y_i = f(x_0)$, con i dígitos

$\mu_i = 0{,}5 \cdot 10^{1-i}$

$X = 4{,}5$

$f(x) = \dfrac{3}{x - x\,\text{sen}(x) + 20} - \dfrac{1}{8}$

$Te \approx \left| \dfrac{-0{,}0211897683 - (-0{,}02118976)}{-0{,}0211897683} \right| \dfrac{1}{5 \cdot 10^{-10} - 5 \cdot 10^{-8}}$

$\rightarrow Te \approx 7{,}9131 \longrightarrow$ es del orden de la unidad

↓

el algoritmo es estable.

Cómo calcula?

Ejercicio 3:

El método correspondiente es interpolación por Lagrange Baricéntrico.

$$P_n(x) = \frac{\sum_{i=0}^{n} y_i \frac{w_i}{x-x_i}}{\sum_{i=0}^{n} \frac{w_i}{x-x_i}}$$

Errores:

E	Línea:	Original (con error)	Reescrito correctamente
1	1	Numerador = 1	Numerador = 0
2	4	Temp = self.W[i] * (x-self.datos.X[i])	Temp = self.W[i] / (x-self.datos.X[i]
3	5	Numerador += self.datos.Y[i] / Temp	Numerador += self.datos.Y[i] * Temp

Justificación de los errores:

Error 1: el valor inicial de la variable "Numerador" sería 1, por lo que al construir el polinomio se tendría un término 1+...

Error 2 y 3: error en la operación que vincula los términos.